Problémás versenyfeladatok

Juhász Péter

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2015. július 9.

Általában

- Fontosság

Általában

- Fontosság
- Objektivitás,

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
    - Útmutatótól eltérő megoldás

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
    - Útmutatótól eltérő megoldás
    - Számolási hiba

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
    - Útmutatótól eltérő megoldás
    - Számolási hiba
    - Jó megoldás 1 pont

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
    - Útmutatótól eltérő megoldás
    - Számolási hiba
    - Jó megoldás 1 pont
    - Zárójel

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
  - Útmutatótól eltérő megoldás
  - Számolási hiba
  - Jó megoldás 1 pont
  - Zárójel
- Mi dönti el a helyezéseket?

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
  - Útmutatótól eltérő megoldás
  - Számolási hiba
  - Jó megoldás 1 pont
  - Zárójel
- Mi dönti el a helyezéseket?
- Reklamáció,

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
  - Útmutatótól eltérő megoldás
  - Számolási hiba
  - Jó megoldás 1 pont
  - Zárójel
- Mi dönti el a helyezéseket?
- Reklamáció, elérhetőség

Általában

- Fontosság
- Objektivitás, közös alapelvek
  - Útmutatótól eltérő megoldás
  - Számolási hiba
  - Jó megoldás 1 pont
  - Zárójel
- Mi dönti el a helyezéseket?
- Reklamáció, elérhetőség
- Versenyek versenye

Bevezető feladat

Feladat (Lovak az istállóban)

Egy istállóban 2 fekete, 4 pej és 8 deres kanca áll. Hány ló mondhatja el magáról, hogy rajta kívül 3 ugyanolyan színű ló van az istállóban, mint ő maga?

Bevezető feladat

Feladat (Lovak az istállóban)

Egy istállóban 2 fekete, 4 pej és 8 deres kanca áll. Hány ló mondhatja el magáról, hogy rajta kívül 3 ugyanolyan színű ló van az istállóban, mint ő maga?

Feladat (Beszélő lovak az istállóban)

A beszélő lovak országában egy istállóban 2 fekete, 4 pej és 8 deres kanca áll. Hány ló mondhatja el magáról, hogy rajta kívül 3 ugyanolyan színű ló van az istállóban, mint ő maga?

Bevezető feladat

Feladat (Lovak az istállóban)

Egy istállóban 2 fekete, 4 pej és 8 deres kanca áll. Hány ló mondhatja el magáról, hogy rajta kívül 3 ugyanolyan színű ló van az istállóban, mint ő maga?

Feladat (Beszélő lovak az istállóban)

A beszélő lovak országában egy istállóban 2 fekete, 4 pej és 8 deres kanca áll. Hány ló mondhatja el magáról, hogy rajta kívül 3 ugyanolyan színű ló van az istállóban, mint ő maga?

Forrás: Raymond Smullyan: Seherezádé rejtélye

Problémás szövegezés

Problémás szövegezés

Problémás szövegezés

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni?

Problémás szövegezés

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni?

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni, ha mindkét színt fel kell használni?

Problémás szövegezés

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni?

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni, ha mindkét színt fel kell használni?

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni, ha mindkét színt fel kell használni és a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

Problémás szövegezés

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni?

Feladat

Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni, ha mindkét színt fel kell használni?

Feladat

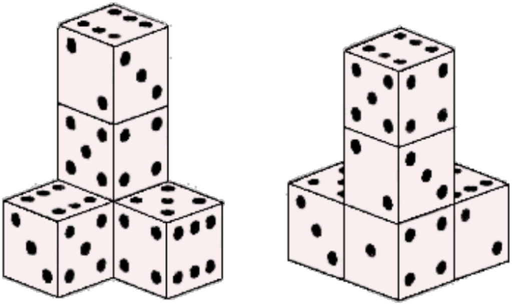
Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni, ha mindkét színt fel kell használni és a forgatással egymásba vihető színezéseket nem tekintjük különbözőnek?

Azt feltételezzük, hogy egy lapot csak egyszínűre lehet színezni.

Problémás szövegezés

Mozaik, 2015., 3-4. osztály, 5. forduló 8. feladat

8. Öt szabályos dobókockát összeragasztottam, és a keletkezett építményt mutatom meg két különböző nézetből:



Hány pötty van összesen az összeragasztott oldalakon?

(A) 24 (B) 22 (C) 27 (D) 28

Problémás szövegezés

Mozaik, 2015., 3-4. osztály, 5. forduló 12. feladat

12. Négyféle pálcikánk van, mindegyikből három darab. Az első fajta 3 cm, a második 4 cm, a harmadik 6 cm, a negyedik 7 cm hosszú.

Hány különböző háromszög készíthető a pálcikákból? (Két háromszög különböző, ha nem egybevágó.)

A 14 B 15 C 17 D 20

Problémás szövegezés

Mozaik, 2015., 3-4. osztály, 5. forduló 2. feladat

2. Legalább hány pozitív páros számot kell leírnunk egy lapra ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük kettő, amelyek különbsége osztható 8-cal?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

Problémás szövegezés

Feladat (Varga Tamás, 2014., 8. osztály, döntő 5. feladat)

Két, egyenként háromfős tenisz csapat megmérkőzik egymással. Az A csapat játékosai: A_1, A_2 és A_3, a B csapat játékosai: B_1, B_2 és B_3. Az első mérkőzést A_1 és B_1 játssza, a vesztes kiesik. A második mérkőzést az első mérkőzés győztese vívja a másik csapat második játékosával, a vesztes itt is kiesik. A harmadik mérkőzést a második mérkőzés győztese vívja a másik csapat még ki nem esett legkisebb sorszámú játékosával, és így tovább. A viadalnak akkor van vége, ha valamelyik csapatnak az utolsó játékosa is kiesik, és ekkor a másik csapat nyer.

a) Hányféleképpen alakulhat a két csapat viadala?

b) ...

Problémás szövegezés

Bolyai, 2015., 8. osztály, 1. forduló 10. feladat

10. Nagyapó kertjében összesen 4 körtefa van, és még néhány almafa is, de ezek úgy vannak ültetve, hogy minden almafától 10 méter távolságra pontosan 2 körtefa található. Összesen hány almafa lehet Nagyapó kertjében?

(A) *2* **(B)** *6* **(C)** *12* **(D)** *14* **(E)** *16*

Valami hiányzik

Valami hiányzik

Mit kell bizonyítani?

Feladat (Varga Tamás, 2015., 8/I. osztály, 3. forduló 3. feladat)

Mutassuk meg, hogy ha p olyan prímszám, hogy $p^2 + 14$ is prímszám, akkor $13p + 2$ is prímszám!

Mit kell bizonyítani?

Feladat (Varga Tamás, 2015., 8/I. osztály, 3. forduló 3. feladat)

Mutassuk meg, hogy ha p olyan prímszám, hogy $p^2 + 14$ is prímszám, akkor $13p + 2$ is prímszám!

Kell-e indokolni azt, hogy egy szám négyzetének 3-as maradéka 0 vagy 1?

Egyszerű, de mégsem

Feladat (Dürer, 2014., B kategória, helyi forduló 5. feladat)

Egy virágboltban rózsát, tulipánt és gerberát árulnak. Négy szál virágból álló csokrot szeretnénk vásárolni. Két csokrot akkor tekintünk egyformának, ha mindhárom fajta virágból ugyanannyi szál van benne. Hányféle különböző csokrot lehet köttetni? (Nem kell mindhárom fajta virágnak benne lennie a csokorban.)

Látja vagy sem?

Feladat (Kalmár, 2015., 7. osztály, megyei forduló 5. feladat)

Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 100 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik, ..., végül a századik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).
Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 100 kék korong lesz az asztalon?

(Túl?) Nehéz feladatok

(Túl?) Nehéz feladatok

Reciprokösszeg

Feladat (Kalmár, 2012., 6. osztály, döntő 6. feladat)

Számítsuk ki minél egyszerűbben a következő összeget:

$$\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{5\cdot 18}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 96}.$$

Reciprokösszeg - megoldás

$$\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \frac{1}{4 \cdot 15} + \frac{1}{5 \cdot 18} + \cdots + \frac{1}{31 \cdot 96} =$$

Reciprokösszeg - megoldás

$$\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{5\cdot 18}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 96}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 32}\right).$$

Reciprokösszeg - megoldás

$$\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{5\cdot 18}+\dots+\frac{1}{31\cdot 96}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots+\frac{1}{31\cdot 32}\right).$$

A további átalakításhoz segít a következő ötlet:

$$\frac{1}{a\cdot(a+1)}=\frac{(a+1)-a}{a\cdot(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

Reciprokösszeg - megoldás

$$\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+\frac{1}{4\cdot 15}+\frac{1}{5\cdot 18}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 96}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 32}\right).$$

A további átalakításhoz segít a következő ötlet:

$$\frac{1}{a\cdot(a+1)}=\frac{(a+1)-a}{a\cdot(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

Ezt felhasználva az összeg:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{30}-\frac{1}{31}+\frac{1}{31}-\frac{1}{32}\right)=\frac{5}{32}.$$

Reciprokösszeg

Feladat (Bolyai nemzetközi, 2015., 6. osztály, döntő 2. feladat)

Mennyi az

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

összeg pontos értéke?

Stratégiás játék

Feladat (Kalmár, 2015., 8. osztály, döntő 7. feladat)

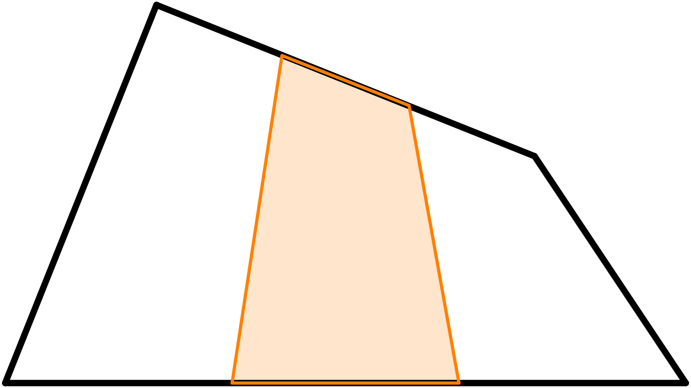
Egy 8×8-as sakktáblán a következő játékot játssza két játékos: az első játékos elhelyezi a királyt a tábla egyik mezőjén, majd felváltva lépnek a királlyal (az első lépést a királlyal a második játékos teszi). Olyan mezőre szabad csak lépnie a soron következő játékosnak, ahol a király még nem járt. Az a játékos veszít, aki már nem tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Adj meg egy nyerő stratégiát! (A királlyal egy lépés során egy él- vagy egy csúcsszomszédos mezőre szabad lépni.)

Középső sáv

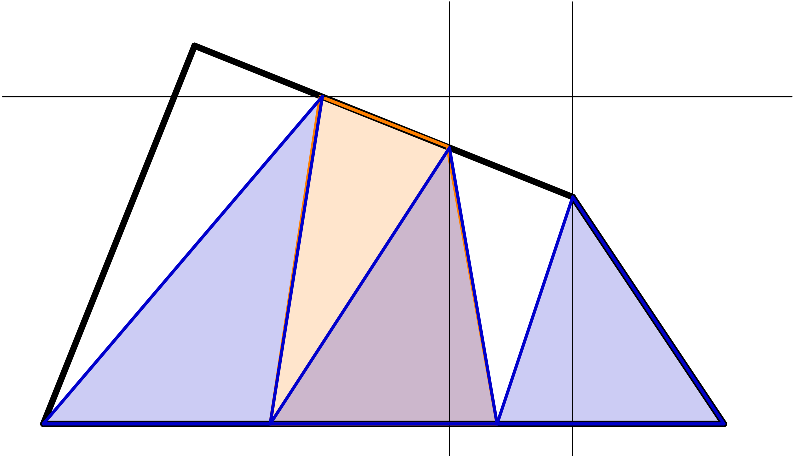
Feladat (Kalmár, 2001., 7. osztály, döntő 7. feladat)

Az $ABCD$ konvex négyszögben a P és Q pontok az AB oldalt, az R és S pontok a CD oldalt 3 egyenlő részre osztják. Hányszorosa az $ABCD$ négyszög területe a $PQRS$ négyszög területének?

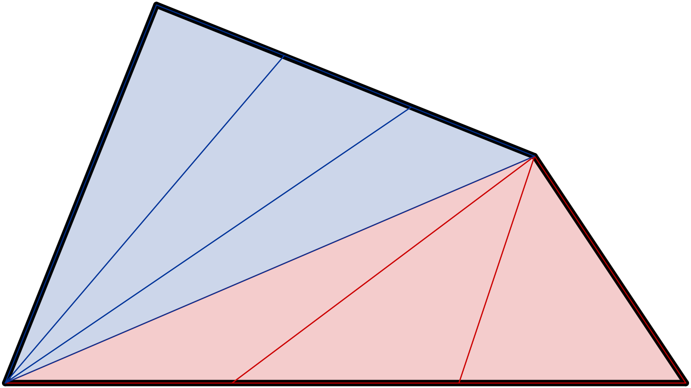
Középső sáv



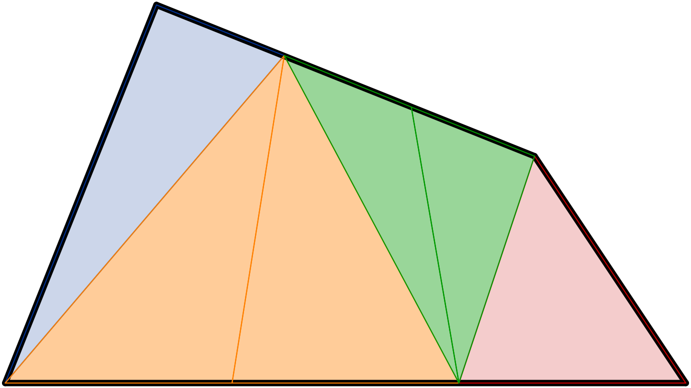
Középső sáv - 1. megoldás



Középső sáv - 2. megoldás



Középső sáv - 2. megoldás

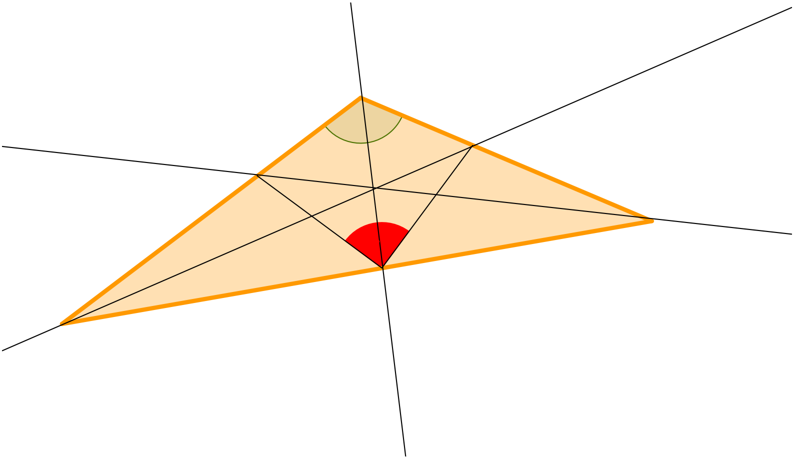


Mekkora a szög?

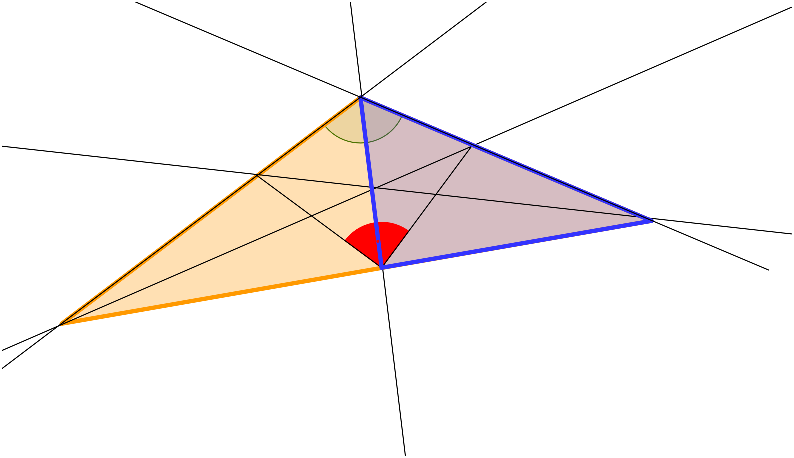
Feladat (Kalmár, 2003., 7. osztály, döntő 7. feladat)

Az ABC háromszög C csúcsnál lévő szöge 120°. A háromszög belső szögfelelzői AP, BQ és CR. Számítsuk ki a PRQ szöget!

Mekkora a szög? - Megoldás



Mekkora a szög? - Megoldás



Az előadás összeállításában nagy segítségemre voltak:

Pósa Lajos, Hujter Bálint, Kosztolányi József, Tassy Gergely.

Az előadás összeállításában nagy segítségemre voltak:

Pósa Lajos, Hujter Bálint, Kosztolányi József, Tassy Gergely.

Köszönöm a figyelmet.